Имя файла: korshun.smz
Дата: **10 августа 2000**
Время: **14:06**
Наборщик: **С. С./С. С.**

УДК 519.71+519.218.82

# ЧИСЛО СПЕЦИАЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТЕКОВЫХ ФИЛЬТРОВ*)

*А. Д. Коршунов, И. Шмулевич*

Изучаются три множества специальных монотонных булевых функций от $n$ переменных: одно множество при четном $n$ и два множества при нечетном $n$. Эти множества характеризуются тем, что нижние единицы любой функции из одного множества располагаются на трех фиксированных соседних слоях $n$-мерного единичного куба и удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Находятся асимптотики для числа таких функций $f$ из каждого множества, что при фиксированных трех слоях функция $f$ имеет заданное число нижних единиц в нижнем слое, заданное число верхних нулей в верхнем слое и равна 1 на заданном числе наборов среднего слоя. Показано, что при любом $n \to \infty$ число всех монотонных булевых функций от $n$ переменных асимптотически совпадает с числом специальных функций от $n$ переменных. Полученные асимптотики используются для характеризации статистических свойств стековых фильтров.

## Введение

В статье исследуются три множества монотонных булевых функций от $n$ переменных и полученные результаты используются для выявления статистических свойств стековых фильтров.

Эти множества определяются следующим образом. Пусть $M(n)$ обозначает множество всех монотонных булевых функций от $n$ переменных и $E^{n,k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, обозначает множество наборов (вершин) в $n$-мерном единичном кубе $E^n$, в каждом из которых содержится $k$ единиц и $n-k$ нулей.

При любом четном $n$ обозначим через $M_0(n)$ множество функций $f \in M(n)$ таких, что все нижние единицы функции $f$ находятся

*) Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00531) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (объединенный проект АО–110).

в $E^{n,n/2-1}$, $E^{n,n/2}$ и $E^{n,n/2+1}$, а во всех вершинах из $E^{n,n/2+2},\dots,E^{n,n}$ функция $f$ равна 1. В [2] доказано, что $|M_0(n)| \sim |M(n)|$.

В случае четного $n$ функция из $M_0(n)$ называется *специальной,* если ее множество нижних единиц из $E^{n,n/2-1}$ и ее множество верхних нулей из $E^{n,n/2+1}$ распадаются на одноэлементные и двухэлементные связки (определение связки см. ниже), а число двухэлементных связок в каждом таком множестве не превосходит $n^4$. Множество всех специальных функций из $M_0(n)$ обозначается через $M_0^1(n)$.

Если $n$ нечетно, то через $M_{0,1}(n)$ обозначается множество функций $f \in M(n)$ таких, что все нижние единицы функции $f$ находятся в $E^{n,(n-3)/2}$, $E^{n,(n-1)/2}$ и $E^{n,(n+1)/2}$, а во всех вершинах из $E^{n,(n+3)/2},\dots,E^{n,n}$ функция $f$ равна 1. Наконец, через $M_{0,2}(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$ таких, что все нижние единицы функции $f$ находятся в $E^{n,(n-1)/2}$, $E^{n,(n+1)/2}$ и $E^{n,(n+3)/2}$, а во всех вершинах из $E^{n,(n+5)/2},\dots,E^{n,n}$ функция $f$ равна 1. В [2] доказано, что

$$|M_{0,1}(n)| = |M_{0,2}(n)| \sim \frac{1}{2}\,|M(n)|\,.$$

При нечетном $n$ функция $f \in M_{0,1}(n)$ ($f \in M_{0,2}(n)$) называется *специальной,* если множество нижних единиц в $E^{n,(n-3)/2}$ (в $E^{n,(n-1)/2}$) и множество верхних нулей в $E^{n,(n+1)/2}$ (в $E^{n,(n+3)/2}$) распадаются на одноэлементные и двухэлементные связки и число двухэлементных связок в каждом таком множестве не превосходит $n^4$. Множество всех специальных функций из $M_{0,1}(n)$ (из $M_{0,2}(n)$) обозначим через $M_{0,1}^1(n)$ ($M_{0,2}^1(n)$).

В статье найдены асимптотики для числа функций $f \in M_0^1(n)$ таких, что $f$ имеет фиксированное число нижних единиц в $E^{n,n/2-1}$, фиксированное число верхних нулей в $E^{n,n/2+1}$ и $f$ равна 1 на фиксированном числе наборов из $E^{n,n/2}$ (теорема 1). Аналогичные асимптотики найдены в случае, когда рассматриваются функции из $M_{0,1}^1(n)$ и $M_{0,2}^1(n)$ (теоремы 2 и 3).

Из теорем 1–3 следует, что $|M_0^1(n)| \sim |M(n)|$ и $\left|M_{0,1}^1(n)\right| \sim \left|M_{0,2}^1(n)\right| \sim \frac{1}{2}\,|M(n)|$, т. е. почти все функции из $M(n)$ являются специальными.

Нахождение этих асимптотик было мотивировано изучением статистических свойств одного класса нелинейных цифровых фильтров. Главной целью фильтрации сигналов является устранение шума, т. е. оценивание истинного сигнала по наблюдаемому сигналу. Часто предполагается, что шум является аддитивным и независимым от истинного сигнала. Фильтры обычно работают в скользящем режиме, используя окно заданной величины. По значениям сигнала в окне фильтр порождает оценку для каждого отсчета сигнала.

В теории фильтрации давно используются линейные фильтры. Однако эти фильтры имеют существенные недостатки. Такие фильтры не позволяют эффективно бороться с кратковременными всплесками и шумами, в распределениях которых имеются длинные «хвосты». Кроме того, при борьбе с шумом линейные фильтры сглаживают сигнал, что часто нежелательно.

Чтобы избежать таких недостатков, в теории фильтрации был предложен класс так называемых стековых фильтров [14]. В этом классе содержатся многие другие известные фильтры. К ним относятся медианные и взвешенные медианные фильтры, некоторые фильтры, основанные на порядковых статистиках, морфологические фильтры и т. д. Хорошие обзоры о стековых фильтрах имеются, например, в [4, 8, 10, 15]. Более подробные сведения о стековых фильтрах содержатся в разд. 4 настоящей статьи.

## 1. Основные понятия и формулировка результатов

Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — различные двоичные наборы длины $n$. Говорят, что $\tilde{\alpha}$ предшествует $\tilde{\beta}$ (обозначение: $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ при любом $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $\tilde{\alpha} \not\prec \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \not\prec \tilde{\alpha}$, то $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются несравнимыми наборами. По отношению к предикату $\prec$ множество всех двоичных наборов одинаковой длины является частично упорядоченным множеством.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, выполняется неравенство $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$. Множество монотонных булевых функций от $n$ переменных обозначается через $M(n)$.

Пусть $E^n$ обозначает $n$-мерный единичный куб, т. е. граф с $2^n$ вершинами, которые помечены двоичными наборами длины $n$, а вершины $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ смежны тогда и только тогда, когда расстояние Хемминга $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i \oplus \beta_i) = 1$.

Совокупность тех наборов (вершин) из $E^n$, в которых содержится в точности по $k$ единиц, $0 \leqslant k \leqslant n$, называется $k$-м *слоем* в $E^n$ и обозначается через $E^{n,k}$. Вершина $\tilde{\alpha} \in E^n$ называется *нижней единицей* монотонной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f(\tilde{a}) = 1$ и $f(\tilde{\beta}) = 0$ для любой вершины $\tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha}$. Вершина $\tilde{\alpha} \in E^n$ называется *верхним нулем* монотонной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f(\tilde{a}) = 0$ и $f(\tilde{\beta}) = 1$ для любой вершины $\tilde{\beta} \succ \tilde{\alpha}$.

Пусть $\tilde{\alpha}$ — произвольная вершина из $E^{n,k}$. Множество всех вершин $\tilde{\beta}$ из $E^{n,k+s}$ ($s \geqslant 1$ и $k + s \leqslant n$) таких, что $\tilde{\beta} \succ \tilde{\alpha}$, называется *$s$-тенью* вершины $\tilde{\alpha}$. Пусть $A$ — произвольное подмножество вершин в $E^{n,k}$. Тогда множество всех вершин в $E^{n,k+s}$, каждая из которых принадлежит $s$-тени по крайней мере одной вершины из $A$, называется *$s$-тенью* подмножества $A$ и обозначается через $T^s(A)$.

Пусть $A = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_r\}$ — произвольное $r$-элементное подмножество в $E^{n,k}$. Совокупность вершин из $A$ разбивается на *связки*: вершины $\tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{\alpha}_j$ включаются в одну связку тогда и только тогда, когда в $A$ имеются вершины $\tilde{\alpha}_{s_1}, \tilde{\alpha}_{s_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{s_k}$ такие, что расстояние Хемминга $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{s_1}) = \rho(\tilde{\alpha}_{s_k}, \tilde{\alpha}_j) = 2$ и $\rho(\tilde{\alpha}_{s_v}, \tilde{\alpha}_{s_{v+1}}) = 2$ при любом $v$, $1 \leqslant v \leqslant s-1$.

В [2] найдены следующие асимптотики для числа монотонных булевых функций от $n$ переменных:

(a) при любом четном $n \to \infty$

$$|M(n)| \sim 2^{\binom{n}{n/2}} \exp\left\{ \binom{n}{n/2-1} \left( \frac{1}{2^{n/2}} + \frac{n^2}{2^{n+5}} - \frac{n}{2^{n+4}} \right) \right\}; \tag{1.1}$$

(b) при любом нечетном $n \to \infty$

$$|M(n)| \sim 2^{\binom{n}{(n-1)/2}+1} \exp\left\{ \binom{n}{(n-3)/2} \left( \frac{1}{2^{(n+3)/2}} - \frac{n^2}{2^{n+6}} - \frac{n}{2^{n+3}} \right) + \binom{n}{(n-1)/2} \left( \frac{1}{2^{(n+1)/2}} + \frac{n^2}{2^{n+4}} \right) \right\}. \tag{1.2}$$

При установлении асимптотик (1.1) и (1.2) в [2] были обнаружены полезные свойства монотонных булевых функций, которые позднее использовались в работах [1, 3, 5].

Одним из таких свойств является следующее. Пусть $M_0(n)$ обозначает множество функций из $M(n)$, удовлетворяющих условиям:

если $n$ четно, то $M_0(n)$ состоит из функций $f \in M(n)$ таких, что все нижние единицы функции $f$ расположены в слоях $E^{n,n/2-1}$, $E^{n,n/2}$ и $E^{n,n/2+1}$, а во всех вершинах, находящихся в слоях $E^{n,n/2+2}, \dots, E^{n,n}$, функция $f$ равна 1;

если $n$ нечетно, то $M_0(n)$ состоит из функций $f \in M(n)$ таких, что все нижние единицы функции $f$ расположены либо в слоях $E^{n,(n-3)/2}$, $E^{n,(n-1)/2}$ и $E^{n,(n+1)/2}$, либо в слоях $E^{n,(n-1)/2}$, $E^{n,(n+1)/2}$ и $E^{n,(n+3)/2}$.

В первом случае $f(\tilde{\alpha}) = 1$ для всех $\tilde{\alpha}$, находящихся в $E^{n,(n+3)/2}, \dots, E^{n,n}$, а во втором случае $f(\tilde{\alpha}) = 1$ для всех $\tilde{\alpha}$, находящихся в $E^{n,(n+5)/2}, \dots, E^{n,n}$.

Тогда, как показано в [2], при $n \to \infty$

$$|M_0(n)| \sim |M(n)|. \tag{1.3}$$

Кроме того, в [2] обнаружены другие интересные свойства типичных функций из $M(n)$.

Основная цель настоящей статьи состоит в установлении асимптотик для числа специальных функций из $M_0(n)$ и их применении к изучению статистических свойств стековых фильтров. Множество таких функций обозначается через $M_0^1(n)$ и в зависимости от четности или нечетности $n$ определяется по-разному. Начнем со случая четных $n$.

Пусть при любом четном $n$

$$r_0 = r_0(n) = v_0 = v_0(n) = \left\lfloor \binom{n}{n/2-1} 2^{-n/2-1} \right\rfloor, \quad z_0 = \left\lfloor \frac{1}{2}\binom{n}{n/2} \right\rfloor. \quad (1.4)$$

Тогда при таких $n$ множество $M_0^1(n)$ состоит из функций $f \in M_0(n)$ таких, что

1) в $E^{n,n/2-1}$ функция $f$ имеет $r$ нижних единиц, где $r_0 - n2^{n/4} \leqslant r \leqslant r_0 + n2^{n/4}$;

2) множество нижних единиц функции $f$, находящихся в $E^{n,n/2-1}$, распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, и число двухэлементных связок не превосходит $n^4$;

3) в $E^{n,n/2+1}$ функция $f$ имеет $v$ верхних нулей, где $v_0 - n2^{n/4} \leqslant v \leqslant v_0 + n2^{n/4}$;

4) множество верхних нулей функции $f$, находящихся в $E^{n,n/2+1}$, распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, и число двухэлементных связок не превосходит $n^4$;

5) в $E^{n,n/2}$ имеется $z$ наборов $\tilde{\alpha}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а $z$ удовлетворяет неравенствам $z_0 - n2^{n/2} \leqslant z \leqslant z_0 + n2^{n/2}$.

Обозначим через $M_0^1(n, r, z, v)$ множество функций $f \in M_0^1(n)$ таких, что $f$ имеет $r$ нижних единиц в $E^{n,n/2-1}$, $v$ верхних нулей в $E^{n,n/2+1}$ и $f$ равна 1 на $z$ наборов из $E^{n,n/2}$.

**Теорема 1.** *Пусть $n$ четно,*

$$r = r_0 + k, \quad z = z_0 + u, \quad v = v_0 + t, \quad (1.5)$$

*где $r_0$, $z_0$, $v_0$ определены в (1.4). Тогда при любых $k$, $u$ и $t$ таких, что $|k| \leqslant n2^{n/4}$, $|u| \leqslant n2^{n/2}$, $|t| \leqslant n2^{n/4}$, и $n \to \infty$*

$$|M_0^1(n, r, z, v)| \sim \sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3 \binom{n}{n/2}^3}} |M(n)| \exp\left\{ -\frac{2^{n/2}}{\binom{n}{n/2-1}}(k^2 + t^2) - \frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}} \right\}.$$

При любом нечетном $n$ множество $M_0^1(n)$ является объединением непересекающихся множеств $M_{0,1}^1(n)$ и $M_{0,2}^1(n)$, т. е.

$$M_0^1(n) = M_{0,1}^1(n) \cup M_{0,2}^1(n), \quad M_{0,1}^1(n) \cap M_{0,2}^1(n) = \varnothing. \quad (1.6)$$

В определении множества $M^1_{0,1}(n)$ используются параметры $r_1, z_1, v_1$, задаваемые следующим образом:

$$\begin{aligned} r_1 = r_1(n) &= \left\lfloor \binom{n}{(n-3)/2} 2^{-(n+3)/2} \right\rfloor, \\ v_1 = v_1(n) &= \left\lfloor \binom{n}{(n+1)/2} 2^{-(n+1)/2} \right\rfloor, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$z_1 = \left\lfloor \frac{1}{2}\left( \binom{n}{(n-1)/2} + r_1(n+3)/2 - v_1(n+1)/2 \right) \right\rfloor. \tag{1.8}$$

Множество $M^1_{0,1}(n)$ состоит из таких функций $f \in M_0(n)$, что

1) все нижние единицы функции $f$ находятся в $E^{n,(n-3)/2}$, $E^{n,(n-1)/2}$ и $E^{n,(n+1)/2}$;

2) в $E^{n,(n-3)/2}$ функция $f$ имеет $r$ нижних единиц, где $r_1 - n2^{n/4} \leqslant r \leqslant r_1 + n2^{n/4}$;

3) множество нижних единиц функции $f$, находящихся в $E^{n,(n-3)/2}$, распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, и число двухэлементных связок не превосходит $n^4$;

4) в $E^{n,(n+1)/2}$ функция $f$ имеет $v$ верхних нулей, где $v_1 - n2^{n/4} \leqslant v \leqslant v_1 + n2^{n/4}$;

5) множество верхних нулей функции $f$, находящихся в $E^{n,(n+1)/2}$, распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, и число двухэлементных связок не превосходит $n^4$;

6) в $E^{n,(n-1)/2}$ имеется $z$ наборов $\tilde{\alpha}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а $z$ удовлетворяет неравенствам $z_1 - n2^{n/2} \leqslant z \leqslant z_1 + n2^{n/2}$.

Обозначим через $M^1_{0,1}(n, r, z, v)$ множество функций $f \in M^1_{0,1}(n)$ таких, что $f$ имеет $r$ нижних единиц в $E^{n,(n-3)/2}$, $v$ верхних нулей в $E^{n,(n+1)/2}$ и $f$ равна 1 на $z$ наборах из $E^{n,(n-1)/2}$.

**Теорема 2.** *Пусть $n$ нечетно,*

$$r = r_1 + k, \quad z = z_1 + u, \quad v = v_1 + t, \tag{1.9}$$

*где $r_1, z_1, v_1$ определены в (1.7) и (1.8). Тогда при любых $k$, $u$, $t$ таких, что $|k| \leqslant n2^{n/4}$, $|u| \leqslant n2^{n/2}$, $|t| \leqslant n2^{n/4}$, и $n \to \infty$*

$$\begin{aligned} |M^1_{0,1}(n, r, z, v)| \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3 \binom{n}{(n-1)/2}^3}} |M(n)| \\ \times \exp\left\{ -\frac{2^{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n-3)/2}} k^2 - \frac{2^{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n+1)/2}} t^2 - \frac{2u^2}{\binom{n}{(n-1)/2}} \right\}. \end{aligned}$$

В определении множества $M^1_{0,2}(n)$ используются параметры $r_2, z_2, v_2$, задаваемые следующим образом:

$$r_2 = r_2(n) = \left\lfloor \binom{n}{(n-1)/2} 2^{-(n+1)/2} \right\rfloor,$$
$$v_2 = v_2(n) = \left\lfloor \binom{n}{(n+3)/2} 2^{-(n+3)/2} \right\rfloor, \tag{1.10}$$

$$z_2 = \left\lfloor \frac{1}{2} \left( \binom{n}{(n+1)/2} + r_2(n+1)/2 - v_2(n+3)/2 \right) \right\rfloor. \tag{1.11}$$

Множество $M^1_{0,2}(n)$ состоит из функций $f \in M_0(n)$ таких, что

1) все нижние единицы функции $f$ находятся в $E^{n,(n-1)/2}$, $E^{n,(n+1)/2}$ и $E^{n,(n+3)/2}$;

2) в $E^{n,(n-1)/2}$ функция $f$ имеет $r$ нижних единиц, где $r_2 - n2^{n/4} \leqslant r \leqslant r_2 + n2^{n/4}$;

3) множество нижних единиц функции $f$, находящихся в $E^{n,(n-1)/2}$, распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, и число двухэлементных связок не превосходит $n^4$;

4) в $E^{n,(n+3)/2}$ функция $f$ имеет $v$ верхних нулей, где $v_2 - n2^{n/4} \leqslant v \leqslant v_2 + n2^{n/4}$;

5) множество верхних нулей функции $f$, находящихся в $E^{n,(n+3)/2}$, распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, и число двухэлементных связок не превосходит $n^4$;

6) в $E^{n,(n+1)/2}$ имеется $z$ наборов $\tilde{\alpha}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а $z$ удовлетворяет неравенствам $z_2 - n2^{n/2} \leqslant z \leqslant z_2 + n2^{n/2}$.

Обозначим через $M^1_{0,2}(n,r,z,v)$ множество функций $f \in M^1_{0,2}(n)$ таких, что $f$ имеет $r$ нижних единиц в $E^{n,(n-1)/2}$, $v$ верхних нулей в $E^{n,(n+3)/2}$ и $f$ равна 1 на $z$ наборах из $E^{n,(n+1)/2}$.

**Теорема 3.** *Пусть $n$ нечетно,*

$$r = r_2 + k, \quad z = z_2 + u, \quad v = v_2 + t, \tag{1.12}$$

*где $r_2, z_2, v_2$ определены в (1.10) и (1.11). Тогда при любых $k$, $u$, $t$ таких, что $|k| \leqslant n2^{n/4}$, $|u| \leqslant n2^{n/2}$, $|t| \leqslant n2^{n/4}$, и $n \to \infty$*

$$|M^1_{0,2}(n,r,z,v)| \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3 \binom{n}{(n-1)/2}^3}}|M(n)| \\ \times \exp\left\{ -\frac{2^{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n-1)/2}}k^2 - \frac{2^{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n+3)/2}}t^2 - \frac{2u^2}{\binom{n}{(n+1)/2}} \right\}.$$

Из теорем 1–3 легко следует (см. замечания 1 и 2), что при любом $n \to \infty$

$$|M^1_0(n)| \sim |M(n)|,$$

т. е. почти все функции из $M_0(n)$ и почти все функции из $M(n)$ являются специальными.

## 2. Доказательство теоремы 1

При любом четном $n$ ради краткости будем полагать

$$m = \binom{n}{n/2-1} = \binom{n}{n/2+1}. \tag{2.1}$$

Обозначим через $M_0^1(n,r,z,v,s,w)$ множество функций $f \in M_0^1(n,r,z,v)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) в множестве нижних единиц функции $f$, находящихся в $E^{n,n/2-1}$, имеется $s$ двухэлементных связок;

2) в множестве верхних нулей функции $f$, находящихся в $E^{n,n/2+1}$, имеется $w$ двухэлементных связок.

Тогда имеем

$$M_0^1(n,r,z,v) = \bigcup_{s=0}^{n^4} \bigcup_{w=0}^{n^4} M_0^1(n,r,z,v,s,w). \tag{2.2}$$

Все функции $f \in M_0^1(n,r,z,v,s,w)$ можно получить следующим способом.

(a) В $E^{n,n/2-1}$ отбирается $r$-элементное подмножество $A_1$, которое распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а число последних равно $s$. Вершины из $A_1$ объявляются нижними единицами функции $f$. Согласно леммам 15.4 и 15.5 из [2] число возможностей для выбора подмножества $A_1$ асимптотически равно величине

$$\frac{m^{r-s}}{(r-2s)!s!}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{4}-1\right)\right)^s \exp(-r^2n^2/8m).$$

(b) В $E^{n,n/2+1}$ отбирается $v$-элементное подмножество $A_2$, которое распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, причем в $A_2$ имеется $w$ двухэлементных связок и $A_2 \cap T^2(A_1) = \varnothing$. Вершины из $A_2$ объявляются верхними нулями функции $f$.

Согласно леммам 15.4 и 15.7 из [2] число способов выбора подмножества $A_2$ асимптотически равно величине

$$\frac{m^{v-w}}{(v-2w)!w!}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{4}-1\right)\right)^w \exp\left(-\frac{v^2n^2+rvn(n+2)}{8m}\right).$$

(c) Ясно, что если $A_1$ и $A_2$ уже выбраны, то в $E^{n,n/2}$ имеется $r(n/2+1)-s$ наборов $\tilde{\alpha}$ таких, что $f(\tilde{\alpha})=1$, и $v(n/2+1)-w$ наборов $\tilde{\beta}$ таких, что $f(\tilde{\beta})=0$. Поэтому среди $\binom{n}{n/2}-(r+v)(n/2+1)+s+w$ вершин в $E^{n,n/2}$ следует выбрать подмножество $A_3$, состоящее из $z - r(n/2+1)+s$ вершин. Вершины из $A_3$ объявляются нижними единицами функции $f$. Число возможностей для выбора подмножества $A_3$ равно

$$\binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1) + s + w}{z - r(n/2+1) + s}.$$

(d) Каждая вершина в $E^{n,n/2+1}$, которая не принадлежит множеству $T^2(A_1) \cup T^1(A_3) \cup A_2$, объявляется нижней единицей функции $f$.

Из (a)–(d) следует, что при $n \to \infty$

$$|M_0^1(n,r,z,v,s,w)| \sim \binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1) + s + w}{z - r(n/2+1) + s} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{4} - 1\right) - \right)^{s+w}$$
$$\times \exp\left(-\frac{r^2n^2 + v^2n^2 + rvn(n+2)}{8m}\right) \frac{m^{r+v-s-w}}{(r-2s)!s!(v-2w)!w!}. \qquad (2.3)$$

Далее имеем

$$\frac{1}{(r-2s)!} \sim \frac{r^{2s}}{r!} \sim \frac{r_0^{2s}}{r!}, \quad \frac{1}{(v-2w)!} \sim \frac{v^{2w}}{v!} \sim \frac{v_0^{2w}}{v!}, \qquad (2.4)$$

$$\exp\left(-\frac{r^2n^2 + v^2n^2 + rvn(n+2)}{8m}\right) \sim \exp\left(-\frac{r_0^2n^2 + v_0^2n^2 + r_0v_0n(n+2)}{8m}\right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{3mn^2}{2^{n+5}} - \frac{mn}{2^{n+4}}\right). \qquad (2.5)$$

Подставив (2.4) и (2.5) в (2.3), получаем

$$|M_0^1(n,r,z,v,s,w)| \sim \binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1) + s + w}{z - r(n/2+1) + s}$$
$$\times \left(\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{4} - 1\right)\right)^{s+w} \frac{m^{r+v-s-w} r_0^{2s} v_0^{2w}}{r!s!v!w!} \exp\left(-\frac{3mn^2}{2^{n+5}} - \frac{mn}{2^{n+4}}\right). \qquad (2.6)$$

При рассматриваемых $r, z, v, s, w$, где $s + w \geqslant 1$, и $n \to \infty$ имеем

$$\binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1) + s + w}{z - r(n/2+1) + s} = \binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1)}{z - r(n/2+1)}$$
$$\times \prod_{i=1}^{s+w} \left\{ \binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1) + i \right\} \Big/ \left\{ \prod_{j=1}^{s} (z - r(n/2+1) + j) \right.$$
$$\left. \times \prod_{j=1}^{w} \binom{n}{n/2} - v(n/2+1) - z + j \right\}$$
$$\sim 2^{s+w} \binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1)}{z - r(n/2+1)}. \qquad (2.7)$$

Подставив (2.7) в (2.6) и воспользовавшись (2.2), при $n \to \infty$ получаем

$$|M_0^1(n,r,z,v)| \sim \binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1)}{z - r(n/2+1)} \frac{m^{r+v}}{r!v!}$$
$$\times \exp\left(-\frac{3mn^2}{2^{n+5}} - \frac{mn}{2^{n+4}}\right) \sum_{s=0}^{n^4} \left(\frac{n^2}{4}-1\right)^s \frac{r_0^{2s}}{m^s s!} \sum_{w=0}^{n^4} \left(\frac{n^2}{4}-1\right)^w \frac{v_0^{2w}}{m^w w!}.$$

В свою очередь, пользуясь (1.4), имеем

$$\sum_{s=0}^{n^4} \left(\frac{n^2}{4}-1\right)^s \frac{r_0^{2s}}{m^s s!} \sum_{w=0}^{n^4} \left(\frac{n^2}{4}-1\right)^w \frac{v_0^{2w}}{m^w w!}$$
$$\sim \exp\left(\left(\frac{n^2}{4}-1\right) v_0^2 m^{-1}\right) \sum_{s=0}^{n^4} \left(\frac{n^2}{4}-1\right)^s \frac{r_0^{2s}}{s!m^s}$$
$$\sim \exp\left(\left(\frac{n^2}{4}-1\right)\left(v_0^2 m^{-1} + r_0^2 m^{-1}\right)\right) \sim \exp\left(\left(\frac{n^2}{4}-1\right) m 2^{-n-1}\right)$$
$$\sim \exp\left(mn^2 2^{-n-3}\right).$$

Поэтому

$$\left|M_0^1(n,r,z,v)\right| \sim \binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1)}{z - r(n/2+1)} \frac{m^{r+v}}{r!v!}$$
$$\times \exp\left(\frac{mn^2}{2^{n+5}} - \frac{mn}{2^{n+4}}\right). \quad (2.8)$$

Далее имеем

$$\binom{\binom{n}{n/2} - (r+v)(n/2+1)}{z - r(n/2+1)} = \binom{\binom{n}{n/2}}{z} \prod_{i=0}^{v(n/2+1)-1} \left(\binom{n}{n/2} - z - i\right)$$
$$\times \prod_{i=0}^{r(n/2+1)-1} (z-i) \Big/ \prod_{i=0}^{(r+v)(n/2+1)-1} \left(\binom{n}{n/2} - i\right). \quad (2.9)$$

При выполнении условий теоремы получаем

$$\prod_{i=0}^{v(n/2+1)-1} \left(\binom{n}{n/2} - z - i\right) = \left(\binom{n}{n/2} - z\right)^{v(n/2+1)}$$
$$\times \prod_{i=0}^{v(n/2+1)-1} \left(1 - \frac{i}{\binom{n}{n/2} - z}\right)$$
$$\sim \left(\binom{n}{n/2} - z\right)^{v(n/2+1)} \exp\left(-\frac{v^2(n/2+1)^2}{2\left(\binom{n}{n/2} - z\right)}\right), \quad (2.10)$$

$$\prod_{i=0}^{r(n/2+1)-1} (z-i) \sim z^{r(n/2+1)} \exp\left(-\frac{r^2(n/2+1)^2}{2z}\right), \tag{2.11}$$

$$\prod_{i=0}^{(r+v)(n/2+1)-1} \left(\binom{n}{n/2}-i\right) \sim \binom{n}{n/2}^{(r+v)(n/2+1)} \exp\left(-\frac{(r+v)^2(n/2+1)^2}{2\binom{n}{n/2}}\right). \tag{2.12}$$

Подставив (2.10)–(2.12) в (2.9), получаем

$$\binom{\binom{n}{n/2}-(r+v)(n/2+1)}{z-r(n/2+1)} \sim \binom{\binom{n}{n/2}}{z} \left(\binom{n}{n/2}-z\right)^{v(n/2+1)} z^{r(n/2+1)} \times \binom{n}{n/2}^{-(r+v)(n/2+1)} \varphi(n,r,z,v),$$

где

$$\begin{aligned}\varphi(n,r,z,v) &= \exp\left\{(n/2+1)^2\left[\frac{(r+v)^2}{2\binom{n}{n/2}}-\frac{v^2}{2\left(\binom{n}{n/2}-z\right)}-\frac{r^2}{2z}\right]\right\} \\ &\sim \exp\left\{(n/2+1)^2\left[\frac{(r_0+v_0)^2}{2\binom{n}{n/2}}-\frac{v_0^2}{2\left(\binom{n}{n/2}-z_0\right)}-\frac{r_0^2}{2z_0}\right]\right\} \\ &\sim \exp\left\{(n/2+1)^2\left[2r_0-v_0^2-r_0^2\right]/\binom{n}{n/2}\right\} = 1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\binom{\binom{n}{n/2}-(r+v)(n/2+1)}{z-r(n/2+1)} \\ &\qquad\sim \binom{\binom{n}{n/2}}{z}\left(\frac{z}{\binom{n}{n/2}}\right)^{r(n/2+1)}\left(\frac{\left(\binom{n}{n/2}-z\right)}{\binom{n}{n/2}}\right)^{v(n/2+1)} \\ &\qquad= \binom{\binom{n}{n/2}}{z}\left(\frac{z_0+u}{\binom{n}{n/2}}\right)^{r(n/2+1)}\left(\frac{\binom{n}{n/2}-z_0-u}{\binom{n}{n/2}}\right)^{v(n/2+1)}.\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_0+u}{\binom{n}{n/2}}\right)^{r(n/2+1)} &= \left(\frac{z_0}{\binom{n}{n/2}}\right)^{r(n/2+1)}\left(1+\frac{u}{z_0}\right)^{r(n/2+1)} \\ &\sim 2^{-r(n/2+1)}\exp\left(\frac{ur(n/2+1)}{z_0}\right) \sim 2^{-r(n/2+1)}\exp\left(\frac{ur_0(n/2+1)}{z_0}\right),\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\binom{n}{n/2}-z_0-u}{\binom{n}{n/2}}\right)^{v(n/2+1)}=\left(\frac{\binom{n}{n/2}-z_0}{\binom{n}{n/2}}\right)^{v(n/2+1)}\left(1-\frac{u}{\binom{n}{n/2}-z_0}\right)^{v(n/2+1)}$$
$$\sim 2^{-v(n/2+1)}\exp\left(-\frac{uv\,(n/2+1)}{\binom{n}{n/2}-z_0}\right)\sim 2^{-v(n/2+1)}\exp\left(\frac{uv_0\,(n/2+1)}{z_0}\right).$$

Из последних трех соотношений следует, что

$$\binom{\binom{n}{n/2}-(r+v)(n/2+1)}{z-r\,(n/2+1)}\sim\binom{\binom{n}{n/2}}{z}2^{-(r+v)(n/2+1)}. \tag{2.13}$$

Подставив (2.13) в (2.8), получаем

$$\left|M_0^1\,(n,r,z,v)\right|\sim\binom{\binom{n}{n/2}}{z}2^{-(r+v)(n/2+1)}\frac{m^{r+v}}{r!v!}\times\exp\left(\frac{mn^2}{2^{n+5}}-\frac{mn}{2^{n+4}}\right). \tag{2.14}$$

Далее, если выполнены условия теоремы, $z=z_0+u$ и $u>0$, то

$$\binom{\binom{n}{n/2}}{z}=\binom{\binom{n}{n/2}}{z_0+u}=\binom{\binom{n}{n/2}}{z_0}\prod_{i=0}^{u-1}\left(\binom{n}{n/2}-z_0-i\right)\Big/\prod_{i=1}^{u}(z_0+i)$$
$$=\binom{\binom{n}{n/2}}{z_0}\left(\binom{n}{n/2}-z_0\right)^u z_0^{-u}\exp\left(-\frac{u^2}{2\left(\binom{n}{n/2}-z_0\right)}-\frac{u^2}{2z_0}\right)$$
$$\sim\binom{\binom{n}{n/2}}{z_0}\exp\left(-2u^2\Big/\binom{n}{n/2}\right). \tag{2.15}$$

Аналогично убеждаемся в справедливости (2.15) при $u\leqslant 0$.

Подставив (2.15) в (2.14), получаем

$$\left|M_0^1\,(n,r,z,v)\right|\sim\binom{\binom{n}{n/2}}{z_0}2^{-(r+v)(n/2+1)}\frac{m^{r+v}}{r!v!}\exp\left(\frac{mn^2}{2^{n+5}}-\frac{mn}{2^{n+4}}-\frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right).$$

Далее, воспользовавшись формулой Стирлинга [6], имеем

$$\binom{\binom{n}{n/2}}{z_0}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\binom{n}{n/2}}}2^{\binom{n}{n/2}}.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\left|M_0^1\,(n,r,z,v)\right|\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\binom{n}{n/2}}}2^{\binom{n}{n/2}-(r+v)(n/2+1)}\frac{m^{r+v}}{r!v!}$$
$$\times\exp\left(\frac{mn^2}{2^{n+5}}-\frac{mn}{2^{n+4}}-\frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right). \tag{2.16}$$

Снова воспользовавшись формулой Стирлинга, при выполнении условий теоремы имеем

$$\begin{aligned} r! &\sim \sqrt{2\pi r}\,(r/e)^r \sim \sqrt{2\pi r_0}\,(r_0+k)^r\,e^{-r} \\ &= \sqrt{2\pi r_0}r_0^r\left(1+\frac{k}{r_0}\right)^r e^{-r} \sim \sqrt{2\pi r_0}r_0^r\exp\left(\frac{kr}{r_0}-\frac{k^2r}{2r_0^2}-r\right) \\ &= \sqrt{2\pi r_0}r_0^r\exp\left(\frac{k\,(r_0+k)}{r_0}-\frac{k^2\,(r_0+k)}{2r_0^2}-r_0-k\right) \\ &= \sqrt{2\pi r_0}r_0^r\exp\left(\frac{k^2}{2r_0}-\frac{k^3}{2r_0^2}-r_0\right) \sim \sqrt{2\pi r_0}r_0^r\exp\left(\frac{k^2}{2r_0}-r_0\right), \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$v! \sim \sqrt{2\pi v_0}v_0^v\exp\left(\frac{t^2}{2v_0}-v_0\right). \tag{2.18}$$

Подставив (2.17) и (2.18) в (2.16), получаем

$$\begin{aligned} \left|M_0^1\,(n,r,z,v)\right| &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi^3\binom{n}{n/2}r_0v_0}2^{\binom{n}{n/2}}}\left(\frac{m}{r_02^{n/2+1}}\right)^r\left(\frac{m}{v_02^{n/2+1}}\right)^v \\ &\times\exp\left\{r_0+v_0+\frac{mn^2}{2^{n+5}}-\frac{mn}{2^{n+4}}-\frac{k^2}{2r_0}-\frac{t^2}{2v_0}-\frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right\}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Так как

$$r_0 = v_0 = \left\lfloor \binom{n}{n/2-1}2^{-n/2-1}\right\rfloor,$$

то, положив

$$\lambda = \binom{n}{n/2-1}2^{-n/2-1} - r_0, \tag{2.20}$$

где $0 \leqslant \lambda < 1$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{r_02^{n/2+1}}\right)^r &= \left(\frac{m}{2^{n/2+1}\,(m2^{-n/2-1}-\lambda)}\right)^r = 1\Big/\left(1-\frac{\lambda 2^{n/2+1}}{m}\right)^r \\ &\sim \exp\left(\frac{\lambda r2^{n/2+1}}{m}\right) \sim \exp\left(\frac{\lambda r_02^{n/2+1}}{m}\right) \sim e^\lambda, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\left(\frac{m}{v_02^{n/2+1}}\right)^v \sim e^\lambda. \tag{2.22}$$

Подставив (2.21), (2.22) в (2.19) и воспользовавшись (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \left|M_0^1\,(n,r,z,v)\right| &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi^3\binom{n}{n/2}r_0v_0}2^{\binom{n}{n/2}}} \\ &\times\exp\left\{\frac{m}{2^{n/2}}+\frac{mn^2}{2^{n+5}}-\frac{mn}{2^{n+4}}-\frac{k^2}{2r_0}-\frac{t^2}{2v_0}-\frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right\}. \end{aligned}$$

Так как согласно (1.1)

$$2^{\binom{n}{n/2}} \exp\left(\frac{m}{2^{n/2}} + \frac{mn^2}{2^{n+5}} - \frac{mn}{2^{n+4}}\right) \sim |M(n)|,$$

то

$$\begin{aligned}\left|M_0^1(n,r,z,v)\right| &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi^3\binom{n}{n/2} r_0^2}}\, |M(n)| \\ &\qquad\times \exp\left\{-\frac{k^2}{2r_0} - \frac{t^2}{2v_0} - \frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right\} \\ &\sim \sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3\binom{n}{n/2}^3}}\, |M(n)| \exp\left\{-\frac{2^{n/2}}{\binom{n}{n/2-1}}\left(k^2+t^2\right) - \frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right\}.\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из определения множеств $M_0^1(n)$ и $M_0^1(n,r,z,v)$ следует, что в случае четных $n$

$$M_0^1(n) = \bigcup_{|k|\leqslant n2^{n/4}} \bigcup_{|u|\leqslant n2^{n/2}} \bigcup_{|t|\leqslant n2^{n/4}} M_0^1(n, r_0+k, z_0+u, v_0+t).$$

Пользуясь этим фактом и теоремой 1, при четных $n$ получаем

$$\begin{aligned}\left|M_0^1(n)\right| &\sim \sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3\binom{n}{n/2}^3}}\, |M(n)| \sum_{|k|\leqslant n2^{n/4}} \sum_{|u|\leqslant n2^{n/2}} \\ &\qquad\times \sum_{|t|\leqslant n2^{n/4}} \exp\left\{-\frac{2^{n/2}}{\binom{n}{n/2-1}}\left(k^2+t^2\right) - \frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right\} \\ &\sim \sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3\binom{n}{n/2}^3}}\, |M(n)| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2^{n/2}}{\binom{n}{n/2-1}}\left(x^2+y^2\right) - \frac{2z^2}{\binom{n}{n/2}}\right\} dx\,dy\,dz \\ &\sim |M(n)|.\end{aligned}$$

Таким образом, $|M_0^1(n)| \sim |M(n)|$, т. е. почти все функции из $M_0(n)$, а следовательно, и почти все функции из $M(n)$ являются специальными.

### 3. Доказательство теоремы 2

Схема доказательства теоремы 2 совпадает со схемой доказательства теоремы 1. Отличие состоит лишь в том, что в этих случаях основные параметры не совпадают. Поэтому приведем более сжатое доказательство.

При любом нечетном $n$ будем полагать

$$m = \binom{n}{(n-3)/2}, \quad p = \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}. \qquad (3.1)$$

Обозначим через $M^1_{0,1}(n, r, z, v, s, w)$ множество функций $f \in M^1_{0,1}(n, r, z, v)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) в множестве нижних единиц функции $f$, находящихся в $E^{n,(n-3)/2}$, имеется $s$ двухэлементных связок;
2) в множестве верхних нулей функции $f$, находящихся в $E^{n,(n+1)/2}$, имеется $w$ двухэлементных связок.

Тогда имеем

$$M^1_{0,1}(n, r, z, v) = \bigcup_{s=0}^{n^4} \bigcup_{w=0}^{n^4} M^1_{0,1}(n, r, z, v, s, w). \qquad (3.2)$$

Все функции $f \in M^1_{0,1}(n, r, z, v, s, w)$ можно получить следующим способом.

(a) В $E^{n,(n-3)/2}$ отбирается $r$-элементное подмножество $A_1$, которое распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а число двухэлементных связок равно $s$. Вершины из $A_1$ объявляются нижними единицами функции $f$. Согласно леммам 15.4 и 15.5 из [2] число возможностей для выбора подмножества $A_1$ асимптотически равно величине

$$\frac{m^{r-s}}{(r-2s)!s!} \left(\frac{1}{8}\left(n^2-9\right)\right)^s \exp\left(-r^2n^2/8m\right).$$

(b) В $E^{n,(n+1)/2}$ отбирается $v$-элементное подмножество $A_2$, которое распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, причем в $A_2$ имеется $w$ двухэлементных связок и $A_2 \cap T^2(A_1) = \varnothing$. Вершины из $A_2$ объявляются верхними нулями функции $f$. Согласно леммам 15.4 и 15.7 из [2] число возможностей для выбора подмножества $A_2$ асимптотически равно величине

$$\frac{p^{v-w}}{(v-2w)!w!} \left(\frac{1}{8}\left(n^2-1\right)\right)^w \exp\left(-\frac{v^2n^2 + rv\left(n^2+4n+3\right)}{8p}\right).$$

(c) Ясно, что если $A_1$ и $A_2$ уже выбраны, то в $E^{n,(n-1)/2}$ имеется $r(n+3)/2 - s$ наборов, в которых функция $f$ равна 1, и $v(n+1)/2 - w$ наборов, в которых функция $f$ равна 0. Поэтому среди $\binom{n}{(n-1)/2} - r(n+3)/2 - v(n+1)/2 + s + w$ вершин множества $E^{n,(n-1)/2}$ следует выбрать подмножество $A_3$, состоящее из $z - r(n+3)/2 + s$ нижних единиц функции $f$. Число возможностей для выбора подмножества $A_3$ равно

$$\binom{p - r(n+3)/2 - v(n+1)/2 + s + w}{z - r(n+3)/2 + s}.$$

(d) Каждая вершина в $E^{n,(n-1)/2}$, которая не принадлежит множеству $T^2(A_1) \cup T^1(A_3) \cup A_2$, объявляется нижней единицей функции $f$.

Из (a)–(d)следует, что при $n \to \infty$

$$\left|M^1_{0,1}(n,r,z,v,s,w)\right| \sim \binom{p - r(n+3)/2 - v(n+1)/2 + s + w}{z - r(n+3)/2 + s} \times \left(\frac{1}{8}(n^2-9)\right)^s \left(\frac{1}{8}(n^2-1)\right)^w \frac{m^{r-s}p^{v-w}}{(r-2s)!s!(v-2w)!w!} \times \exp\left(-\frac{r^2n^2}{8m} - \frac{v^2n^2 + rv(n^2+4n+3)}{8p}\right). \quad (3.3)$$

Как в случае четных $n$ убеждаемся в том, что

$$\frac{1}{(r-2s)!} \sim \frac{r_1^{2s}}{r!}, \quad \frac{1}{(v-2w)!} \sim \frac{v_1^{2w}}{v!}, \quad (3.4)$$

$$\exp\left(-\frac{r^2n^2}{8m} - \frac{v^2n^2 + rv(n^2+4n+3)}{8p}\right) \sim \exp\left(-\frac{r_1^2n^2}{8m} - \frac{v_1^2n^2 + r_1v_1(n^2+4n+3)}{8p}\right) \sim \exp\left(-\frac{3mn^2}{2^{n+6}} - \frac{pn^2}{2^{n+4}} - \frac{mn}{2^{n+3}}\right), \quad (3.5)$$

$$\binom{p - r(n+3)/2 - v(n+1)/2 + s + w}{z - r(n+3)/2 + s} \sim \binom{p - r(n+3)/2 - v(n+1)/2}{z - r(n+3)/2} 2^{s+w}. \quad (3.6)$$

Подставив (3.4)–(3.6) в (3.3) и воспользовавшись (3.2), при $n \to \infty$ получаем

$$\left|M^1_{0,1}(n,r,z,v)\right| \sim \binom{p - r(n+3)/2 - v(n+1)/2}{z - r(n+3)/2} \frac{m^r p^v}{r!v!} \times \exp\left(-\frac{3mn^2}{2^{n+6}} - \frac{pn^2}{2^{n+4}} - \frac{mn}{2^{n+3}}\right) \times \sum_{s=0}^{n^4} \left(\frac{1}{4}(n^2-9)\right)^s \frac{r_1^{2s}}{s!m^s} \sum_{w=0}^{n^4} \left(\frac{1}{4}(n^2-1)\right)^w \frac{v_1^{2w}}{w!p^w}. \quad (3.7)$$

В свою очередь,

$$\sum_{s=0}^{n^4} \left(\frac{1}{4}(n^2-9)\right)^s \frac{r_1^{2s}}{s!m^s} \sum_{w=0}^{n^4} \left(\frac{1}{4}(n^2-1)\right)^w \frac{v_1^{2w}}{w!p^w} \sim \exp\left(\frac{(n^2-9)r_1^2}{4m} + \frac{(n^2-1)v_1^2}{4p}\right) \sim \exp\left(\frac{mn^2}{2^{n+5}} + \frac{pn^2}{2^{n+3}}\right). \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что

$$\left|M^1_{0,1}(n,r,z,v)\right| \sim \binom{p-r(n+3)/2-v(n+1)/2}{z-r(n+3)/2} \times \frac{m^r p^v}{r!v!}\exp\left(-\frac{mn^2}{2^{n+6}}-\frac{mn}{2^{n+3}}+\frac{pn^2}{2^{n+4}}\right). \quad (3.9)$$

Воспользовавшись равенством

$$\binom{p-r(n+3)/2-v(n+1)/2}{z-r(n+3)/2} = \binom{p-r_1(n+3)/2-v_1(n+1)/2-k(n+3)/2-t(n+1)/2}{z-r_1(n+3)/2-k(n+3)/2},$$

при $k>0$ и $t>0$ имеем

$$\binom{p-r(n+3)/2-v(n+1)/2}{z-r(n+3)/2} = \binom{p-r_1(n+3)/2-v_1(n+1)/2}{z-r_1(n+3)/2} \times \prod_{i=0}^{k(n+3)/2-1}(z-r_1(n+3)/2-i)\prod_{i=1}^{t(n+1)/2}(p-v_1(n+1)/2-z-i) \Big/ \prod_{i=0}^{k(n+3)/2+t(n+1)/2-1}(p-r_1(n+3)/2-v_1(n+1)/2-i).$$

В свою очередь, при выполнении условий теоремы и $n\to\infty$ получаем

$$\prod_{i=0}^{k(n+3)/2-1}(z-r_1(n+3)/2-i)\sim z^{k(n+3)/2}\sim(p/2)^{k(n+3)/2},$$

$$\prod_{i=1}^{t(n+1)/2}(p-v_1(n+1)/2-z-i)\sim(p-z)^{t(n+1)/2}\sim(p/2)^{t(n+1)/2},$$

$$\prod_{i=0}^{k(n+3)/2+t(n+1)/2-1}(p-r_1(n+3)/2-v_1(n+1)/2-i)\sim p^{k(n+3)/2+t(n+1)/2}.$$

Из последних четырех соотношений следует, что при $k>0$, $t>0$ и $n\to\infty$

$$\binom{p-r(n+3)/2-v(n+1)/2}{z-r(n+3)/2} \sim \binom{p-r_1(n+3)/2-v_1(n+1)/2}{z-r_1(n+3)/2}2^{-k(n+3)/2-t(n+1)/2}. \quad (3.10)$$

Аналогично убеждаемся в справедливости (3.10) в случае, когда $k > 0$ и $t \leqslant 0$, либо $k \leqslant 0$. Из (3.9) и (3.10) следует, что

$$\left|M_{0,1}^{1}(n,r,z,v)\right| \sim \binom{p - r_1(n+3)/2 - v_1(n+1)/2}{z - r_1(n+3)/2} \times 2^{(r_1-r)(n+3)/2+(v_1-v)(n+1)/2}\frac{m^r p^v}{r!v!}\exp\left(-\frac{mn^2}{2^{n+6}} - \frac{mn}{2^{n+3}} + \frac{pn^2}{2^{n+4}}\right). \quad (3.11)$$

Воспользовавшись (1.9), (2.15) и формулой Стирлинга, при выполнении теоремы получаем

$$\binom{p - r_1(n+3)/2 - v_1(n+1)/2}{z - r_1(n+3)/2} \sim \binom{p - r_1(n+3)/2 - v_1(n+1)/2}{z_1 + u} \sim \binom{p - r_1(n+3)/2 - v_1(n+1)/2}{z_1} \times \exp\left(-2u^2/\left(p - r_1(n+3)/2 - v_1(n+1)/2\right)\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi p}}2^{p-r_1(n+3)/2-v_1(n+1)/2}\exp\left(-2up^{-1}\right). \quad (3.12)$$

Подставив (3.12) в (3.11), получаем

$$\left|M_{0,1}^{1}(n,r,z,v)\right| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi p}}2^{p-r(n+3)/2-v(n+1)/2}\frac{m^r p^v}{r!v!} \times \exp\left(-\frac{mn^2}{2^{n+6}} - \frac{mn}{2^{n+3}} + \frac{pn^2}{2^{n+4}} - \frac{2u^2}{p}\right).$$

Далее, как при установлении (2.17), убеждаемся в том, что

$$r! \sim \sqrt{2\pi r_1}r_1^r \exp\left(\frac{k^2}{2r_1} - r_1\right), \quad v! \sim \sqrt{2\pi v_1}v_1^v \exp\left(\frac{t^2}{2v_1} - v_1\right).$$

Из последних трех соотношений следует, что

$$\left|M_{0,1}^{1}(n,r,z,v)\right| \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi^3\binom{n}{(n-1)/2}r_1 v_1}}2^{\binom{n}{(n-1)/2}}\left(\frac{m}{r_1 2^{(n+3)/2}}\right)^r\left(\frac{p}{v_1 2^{(n+1)/2}}\right)^v \times \exp\left(r_1 + v_1 - \frac{mn^2}{2^{n+6}} - \frac{mn}{2^{n+3}} + \frac{pn^2}{2^{n+4}} - \frac{k^2}{2r_1} - \frac{t^2}{2v_1} - \frac{2u^2}{p}\right). \quad (3.13)$$

Положив

$$\binom{n}{(n-3)/2}2^{-(n+3)/2} - r_1 = \lambda, \quad \binom{n}{(n-1)/2}2^{-(n+1)/2} - v_1 = \gamma,$$

где $0 \leqslant \lambda < 1$ и $0 \leqslant \gamma < 1$, имеем

$$\left(\frac{m}{r_1 2^{(n+3)/2}}\right)^r = \left(\frac{m}{2^{(n+3)/2}\left(m2^{-(n+3)/2} - \lambda\right)}\right)^r$$
$$= 1 \Big/ \left(1 - \frac{\lambda 2^{(n+3)/2}}{m}\right)^r \sim \exp\left(\frac{\lambda r 2^{(n+3)/2}}{m}\right) \sim e^{\lambda}, \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{p}{v_1 2^{(n+1)/2}}\right)^v \sim e^{\gamma}. \quad (3.15)$$

Подставив (3.14), (3.15) в (3.13) и воспользовавшись (1.7), (1.2) и (3.1), получаем

$$\left|M^1_{0,1}(n,r,z,v)\right| \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi^3\binom{n}{(n-1)/2}r_1 v_1}}\,2^{\binom{n}{(n-1)/2}}$$
$$\times \exp\left(\frac{m}{2^{(n+3)/2}} + \frac{p}{2^{(n+1)/2}} - \frac{mn^2}{2^{n+6}} - \frac{mn}{2^{n+3}} + \frac{pn^2}{2^{n+4}} - \frac{k^2}{2r_1} - \frac{t^2}{2v_1} - \frac{2u^2}{p}\right)$$
$$\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi^3\binom{n}{(n-1)/2}r_1 v_1}}\,|M(n)| \exp\left(-\frac{k^2}{2r_1} - \frac{t^2}{2v_1} - \frac{2u^2}{p}\right)$$
$$\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3\binom{n}{(n-1)/2}^3}}\,|M(n)| \exp\left(-\frac{2^{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n-3)/2}}k^2 - \frac{2^{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n-1)/2}}t^2 - \frac{2u^2}{\binom{n}{(n-1)/2}}\right).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 по существу не отличается от доказательства теоремы 2 и поэтому предоставляется читателю.

Замечание 2. Пусть $n$ нечетно. Тогда из определения множеств $M^1_{0,1}(n)$, $M^1_{0,2}(n)$, $M^1_{0,1}(n,r,z,v)$ и $M^1_{0,2}(n,r,z,v)$ следует, что

$$M^1_{0,1}(n) = \bigcup_{|k|\leqslant n2^{n/4}} \bigcup_{|u|\leqslant n2^{n/2}} \bigcup_{|t|\leqslant n2^{n/4}} M^1_{0,1}(n, r_1+k, z_1+u, v_1+t), \quad (3.16)$$

$$M^1_{0,2}(n) = \bigcup_{|k|\leqslant n2^{n/4}} \bigcup_{|u|\leqslant n2^{n/2}} \bigcup_{|t|\leqslant n2^{n/4}} M^1_{0,2}(n, r_2+k, z_2+u, v_2+t). \quad (3.17)$$

Пользуясь (3.16) и теоремой 2, получаем

$$\begin{aligned}\left|M_{0,1}^1(n)\right| &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3\binom{n}{(n-1)/2}^3}}\,|M(n)|\sum_{|k|\leqslant n2^{n/4}}\sum_{|u|\leqslant n2^{n/2}}\\ &\times\sum_{|t|\leqslant n2^{n/4}}\exp\left\{-\frac{2^{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n-3)/2}}k^2-\frac{2^{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n+1)/2}}t^2-\frac{2u^2}{\binom{n}{(n-1)/2}}\right\}\\ &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3\binom{n}{(n-1)/2}^3}}\,|M(n)|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{2^{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n-3)/2}}x^2\right.\\ &\left.-\frac{2^{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n+1)/2}}y^2-\frac{2z^2}{\binom{n}{(n-1)/2}}\right\}dxdydz \sim \frac{1}{2}|M(n)|.\end{aligned}$$

Далее, пользуясь (3.17) и теоремой 3, аналогично убеждаемся в том, что

$$\left|M_{0,2}^1(n)\right| \sim \frac{1}{2}|M(n)|.$$

Из последних двух соотношений и (1.6) следует, что

$$\left|M_0^1(n)\right| \sim |M(n)|.$$

Пользуясь этим фактом и (1.3), получаем

$$\left|M_0^1(n)\right| \sim |M_0(n)| \sim |M(n)|,$$

т. е. при нечетных $n$ почти все функции из $M_0(n)$ и почти все функции из $M(n)$ являются специальными.

## 4. Статистические свойства стековых фильтров

Известно несколько определений стековых фильтров. Мы воспользуемся следующим определением. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — вещественнозначный вектор наблюдений, находящихся в окне фильтра. Тогда стековый фильтр $S(\mathbf{X})$ определяется следующим образом:

$$S(\mathbf{X}) = \max\left\{\min\{X_j \mid j \in P_1\}, \ldots, \min\{X_j \mid j \in P_K\}\right\},$$

где $P_i \subseteq \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, $i = 1, \cdots, K$, и $X_0 \equiv 1$. Следовательно, множества $P_1, \ldots, P_K$ полностью определяют стековый фильтр. Ясно, что в общем случае операции max и min являются обобщениями операций дизъюнкции и конъюнкции в бинарном случае. В этом случае стековый фильтр задается монотонной булевой функцией.

Известно, что если использовать так называемое пороговое разложение [7], то исследование статистических и детерминированных свойств стековых фильтров в общем случае можно свести к изучению стековых фильтров, заданных монотонными булевыми функциями.

Например, рассмотрим хорошо известный медианный фильтр, введенный в [13, p. 210]. Если размер окна равен 3, т. е. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, то операцией фильтрации является операция

$$\mathrm{MED}(\mathbf{X}) = \max\{\min\{X_1, X_2\}, \min\{X_2, X_3\}, \min\{X_1, X_3\}\}.$$

Эта операция задается монотонной булевой функцией

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3.$$

Одной из причин, по которой стековые фильтры получили популярность, является наличие различных оптимизационных процедур. Эти процедуры позволяют найти стековый фильтр, который удовлетворяет некоторым статистическим и структурным ограничениям и наилучшим образом подавляет шум [12].

Статистические свойства стековых фильтров могут быть охарактеризованы посредством вероятностей выбора рангов, определяемых следующим образом. Пусть входной вектор $\mathbf{X}$ состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин. Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ упорядочены в порядке неубывания и $i$-й член в этом упорядочении обозначен через $X_{(i)}$. В этом случае $X_{(i)}$ называется $i$-й порядковой статистикой.

Так как выход стекового фильтра всегда совпадает с одним из его входов, то величина

$$p_i = \Pr\left\{S(\mathbf{X}) = X_{(i)}\right\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

называется вероятностью выбора $i$-го ранга [11].

Из этих вероятностей можно извлечь важную информацию о чувствительности фильтра к кратковременным всплескам на его входе. Например, если медианный фильтр имеет окно размера $n = 2k + 1$, то $p_{k+1} = 1$ и $p_i = 0$ при $i = 1, \ldots, k, k+2, \ldots, n$. Следовательно, любой всплеск на входе такого фильтра не появится на его выходе.

Теперь переформулируем основные результаты настоящей статьи в терминах вероятностей выбора рангов. Каждой монотонной булевой функции $f$ от $n$ переменных поставим в соответствие числа $A_1, A_2, \ldots,$ $A_n$ такие, что

$$A_i = \left|\left\{\widetilde{\alpha} \in E^{n,i} \mid f(\widetilde{\alpha}) = 0\right\}\right|.$$

Известно [9], что

$$p_i = \frac{A_{n-i}}{\binom{n}{n-i}} - \frac{A_{n-i+1}}{\binom{n}{n-i+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4.1}$$

Вектор $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ называется вектором вероятностей выбора рангов.

Из замечаний 1 и 2 легко следует

Замечание 3. Векторы вероятностей выбора рангов для почти всех стековых фильтров с окном размера $n$ при $n \to \infty$ имеют вид

$$\mathbf{p} = \left(0, \ldots, 0, p_{n/2-1}, p_{n/2}, p_{n/2+1}, p_{n/2+2}, 0, \ldots, 0\right),$$

если $n$ четно, и либо

$$\mathbf{p} = \left(0, \cdots, 0, p_{(n-1)/2}, p_{(n+1)/2}, p_{(n+3)/2}, p_{(n+5)/2}, 0, \cdots, 0\right),$$

либо

$$\mathbf{p} = \left(0, \cdots, 0, p_{(n-3)/2}, p_{(n-1)/2}, p_{(n+1)/2}, p_{(n+3)/2}, 0, \cdots, 0\right),$$

если $n$ нечетно.

Из этого замечания видно, почему многие стековые фильтры являются нечувствительными к всплескам на своих входах. Действительно, почти все стековые фильтры отбрасывают все порядковые статистики за исключением четырех средних.

Эти ненулевые вероятности выбора статистик обозначим через $p^1$, $p^2, p^3, p^4$. При четных $n$ имеем

$$p^1 = p_{n/2-1}, \quad p^2 = p_{n/2}, \quad p^3 = p_{n/2+1}, \quad p^4 = p_{n/2+2}.$$

При нечетных $n$, как и выше, возможны два случая:

$$p^1 = p_{(n-1)/2}, \quad p^2 = p_{(n+1)/2}, \quad p^3 = p_{(n+3)/2}, \quad p^4 = p_{(n+5)/2}$$

или

$$p^1 = p_{(n-3)/2}, \quad p^2 = p_{(n-1)/2}, \quad p^3 = p_{(n+1)/2}, \quad p^4 = p_{(n+3)/2}.$$

Если $n$ четно, то через $F_0\left(n, p^1, p^2, p^3, p^4\right)$ обозначим вероятность того, что случайно выбранный стековый фильтр с окном размера $n$ (предполагается, что все исходы равновероятны) имеет четыре ненулевые вероятности выбора рангов, равные $p^1, p^2, p^3, p^4$.

Убедимся в справедливости следующего утверждения.

**Теорема 4.** *Пусть $n$ четно, и пусть*

$$p^1 = p_{n/2-1} = \frac{1}{2^{n/2+1}} + \frac{t+O(1)}{\binom{n}{n/2-1}},$$
$$p^2 = p_{n/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n/2+1}} - \frac{u}{\binom{n}{n/2}} - \frac{t+O(1)}{\binom{n}{n/2+1}},$$
$$p^3 = p_{n/2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n/2+1}} + \frac{u}{\binom{n}{n/2}} - \frac{k+O(1)}{\binom{n}{n/2-1}},$$
$$p^4 = p_{n/2+2} = \frac{1}{2^{n/2+1}} + \frac{k+O(1)}{\binom{n}{n/2-1}}$$

*суть ненулевые вероятности выбора рангов, причем в каждом случае $|O(1)| < 2$. Тогда при любых $k, t$ и $u$ таких, что $|k| \leqslant n2^{n/4}$, $|t| \leqslant n2^{n/4}$, $|u| \leqslant n2^{n/2}$, и $n \to \infty$ справедливо соотношение*

$$F_0\left(n, p^1, p^2, p^3, p^4\right) \sim \sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3 \binom{n}{n/2}^3}} \exp\left\{-\frac{2^{n/2}}{\binom{n}{n/2-1}}\left(k^2+t^2\right) - \frac{2u^2}{\binom{n}{n/2}}\right\}.$$

Доказательство. Вспомним, что в теореме 1 монотонная булева функция $f$ имеет $r$ нижних единиц в $E^{n,n/2-1}$, $v$ верхних нулей в $E^{n,n/2+1}$ и $f$ равна 1 на $z$ наборах из $E^{n,n/2}$. Положив $r = r_0 + k$, $v = v_0 + t$ и $z = z_0 + u$, где $r_0, v_0$ и $z_0$ взяты из (1.4), получаем

$$r = r_0 + k = \binom{n}{n/2-1} 2^{-n/2-1} + k + O(1) = \binom{n}{n/2-1} - A_{n/2-1},$$
$$v = v_0 + t = \binom{n}{n/2+1} 2^{-n/2-1} + t + O(1) = A_{n/2+1},$$
$$z = z_0 + u = \frac{1}{2}\binom{n}{n/2} + u + O(1) = \binom{n}{n/2} - A_{n/2}.$$

Следовательно,

$$A_{n/2-1} = \binom{n}{n/2-1} - \binom{n}{n/2-1} 2^{-n/2-1} - k + O(1),$$
$$A_{n/2} = \frac{1}{2}\binom{n}{n/2} - u + O(1),$$
$$A_{n/2+1} = \binom{n}{n/2+1} 2^{-n/2-1} + t + O(1).$$

Воспользовавшись этими равенствами, после тождественных преобразований получаем

$$p^1 = p_{n/2-1} = \frac{A_{n/2+1}}{\binom{n}{n/2+1}} - \frac{A_{n/2+2}}{\binom{n}{n/2+2}} = \frac{A_{n/2+1}}{\binom{n}{n/2+1}} = \frac{1}{2^{n/2+1}} + \frac{t+O(1)}{\binom{n}{n/2+1}},$$
$$p^2 = p_{n/2} = \frac{A_{n/2}}{\binom{n}{n/2}} - \frac{A_{n/2+1}}{\binom{n}{n/2+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n/2+1}} - \frac{u}{\binom{n}{n/2}} - \frac{t+O(1)}{\binom{n}{n/2+1}},$$
$$p^3 = p_{n/2+1} = \frac{A_{n/2-1}}{\binom{n}{n/2-1}} - \frac{A_{n/2}}{\binom{n}{n/2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n/2+1}} + \frac{u}{\binom{n}{n/2}} - \frac{k+O(1)}{\binom{n}{n/2-1}},$$
$$p^4 = p_{n/2+2} = \frac{A_{n/2-2}}{\binom{n}{n/2-2}} - \frac{A_{n/2-1}}{\binom{n}{n/2-1}} = \frac{1}{2^{n/2+1}} + \frac{k+O(1)}{\binom{n}{n/2-1}}.$$

Ясно, что во всех случаях $|O(1)| < 2$, а $p^1, p^2, p^3, p^4$ имеют вид, указанный в условии доказываемой теоремы. Так как $k$, $t$ и $u$ удовлетворяют условию теоремы 1, то можно воспользоваться асимптотикой для $|M_0^1(n,r,z,v)|$ из этой теоремы. Поделив эту асимптотику на число всех стековых фильтров с окном размера $n$, т. е. на величину $|M(n)|$, получаем утверждение теоремы 4.

Теперь рассмотрим случай, когда $n$ нечетно. Обозначим через $F_1(n, p^1, p^2, p^3, p^4)$ вероятность того, что случайно выбранный стековый фильтр с окном размера $n$ имеет только следующие ненулевые вероятности выбора рангов:

$$p^1 = p_{(n-1)/2}, \quad p^2 = p_{(n+1)/2}, \quad p^3 = p_{(n+3)/2}, \quad p^4 = p_{(n+5)/2}.$$

Наконец, пусть $F_2(n, p^1, p^2, p^3, p^4)$ обозначает вероятность того, что случайно выбранный стековый фильтр с окном размера $n$ имеет только следующие ненулевые вероятности выбора рангов:

$$p^1 = p_{(n-3)/2}, \quad p^2 = p_{(n-1)/2}, \quad p^3 = p_{(n+1)/2}, \quad p^4 = p_{(n+3)/2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 5.** *Пусть $n$ нечетно, и пусть*

$$p^1 = p_{(n-1)/2} = \frac{1}{2^{(n+1)/2}} + \frac{t+O(1)}{\binom{n}{(n+1)/2}},$$
$$p^2 = p_{(n+1)/2} = \frac{1}{2} + \frac{n-5}{2^{(n+7)/2}} - \frac{u}{\binom{n}{(n-1)/2}} - \frac{t+O(n)}{\binom{n}{(n+1)/2}},$$
$$p^3 = p_{(n+3)/2} = \frac{1}{2} - \frac{n+7}{2^{(n+7)/2}} + \frac{u}{\binom{n}{(n-1)/2}} - \frac{k+O(n)}{\binom{n}{(n-3)/2}},$$
$$p^4 = p_{(n+5)/2} = \frac{1}{2^{(n+3)/2}} + \frac{k+O(1)}{\binom{n}{(n-3)/2}}$$

*суть ненулевые вероятности выбора рангов, причем всюду* $|O(1)| < 2$ *и* $|O(n)| < 2n$. *Тогда при любых* $k, t$ *и* $u$ *таких, что* $|k| \leqslant n2^{n/4}$, $|t| \leqslant n2^{n/4}$, $|u| \leqslant n2^{n/2}$, *и* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$F_1\left(n, p^1, p^2, p^3, p^4\right) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3 \binom{n}{(n-1)/2}^3}} \\ \times \exp\left\{-\frac{2^{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n-3)/2}}k^2 - \frac{2^{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n+1)/2}}t^2 - \frac{2u^2}{\binom{n}{(n-1)/2}}\right\}.$$

**Теорема 6.** *Пусть* $n$ *нечетно, и пусть*

$$p^1 = p_{(n-3)/2} = \frac{1}{2^{(n+3)/2}} + \frac{t + O(1)}{\binom{n}{(n+3)/2}},$$
$$p^2 = p_{(n-1)/2} = \frac{1}{2} - \frac{n+7}{2^{(n+7)/2}} - \frac{u}{\binom{n}{(n+1)/2}} - \frac{t + O(n)}{\binom{n}{(n+3)/2}},$$
$$p^3 = p_{(n+1)/2} = \frac{1}{2} + \frac{n-5}{2^{(n+7)/2}} + \frac{u}{\binom{n}{(n+1)/2}} - \frac{k + O(n)}{\binom{n}{(n-1)/2}},$$
$$p^4 = p_{(n+3)/2} = \frac{1}{2^{(n+1)/2}} + \frac{k + O(1)}{\binom{n}{(n-1)/2}}$$

*суть ненулевые вероятности выбора рангов, причем всюду* $|O(1)| < 2$ *и* $|O(n)| < 2n$. *Тогда при любых* $k, t$ *и* $u$ *таких, что* $|k| \leqslant n2^{n/4}$, $|t| \leqslant n2^{n/4}$, $|u| \leqslant n2^{n/2}$, *и* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$F_2\left(n, p^1, p^2, p^3, p^4\right) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi^3 \binom{n}{(n-1)/2}^3}} \\ \times \exp\left\{-\frac{2^{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n-1)/2}}k^2 - \frac{2^{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n+3)/2}}t^2 - \frac{2u^2}{\binom{n}{(n-1)/2}}\right\}.$$

Доказательства теорем 5 и 6 аналогичны. Поэтому приведем доказательство только теоремы 5.

Доказательство теоремы 5. Вспомним, что в теореме 2 монотонная булева функция $f$ имеет $r$ нижних единиц в $E^{n,(n-3)/2}$, $v$ верхних нулей в $E^{n,(n+1)/2}$ и $f$ равна 1 на $z$ наборах из $E^{n,(n-1)/2}$. Положив $r = r_1 + k$, $v = v_1 + t$ и $z = z_1 + u$, где $r_1, v_1$ и $z_1$ взяты из (1.7) и (1.8), получаем

$$
\begin{aligned}
r &= r_1 + k = \binom{n}{(n-3)/2} 2^{-(n+3)/2} + k + O(1) = \binom{n}{(n-3)/2} - A_{(n-3)/2},\\
v &= v_1 + t = \binom{n}{(n+1)/2} 2^{-(n+1)/2} + t + O(1) = A_{(n+1)/2},\\
z &= z_1 + u = \frac{1}{2}\binom{n}{(n-1)/2} + \frac{r_1(n+3)}{4} - \frac{v_1(n+1)}{4} + u + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\binom{n}{(n-1)/2} + \frac{\binom{n}{(n-3)/2}(n+3)}{2^{(n+7)/2}} - \frac{\binom{n}{(n-1)/2}(n+1)}{2^{(n+5)/2}} + u + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\binom{n}{(n-1)/2} - \frac{\binom{n}{(n-1)/2}(n+3)}{2^{(n+7)/2}} + u + O(n)\\
&= \binom{n}{(n-1)/2} - A_{(n-1)/2}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
A_{(n-3)/2} &= \binom{n}{(n-3)/2} - \binom{n}{(n-3)/2} 2^{-(n+3)/2} - k + O(1),\\
A_{(n-1)/2} &= \frac{1}{2}\binom{n}{(n-1)/2} + \frac{\binom{n}{(n-1)/2}(n+3)}{2^{(n+7)/2}} - u + O(n),\\
A_{(n+1)/2} &= \binom{n}{(n+1)/2} 2^{-(n+1)/2} + t + O(1).
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись этими равенствами, после тождественных преобразований получаем

$$
\begin{aligned}
p^1 &= p_{(n-1)/2} = \frac{A_{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n+1)/2}} - \frac{A_{(n+3)/2}}{\binom{n}{(n+3)/2}} = \frac{A_{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n+1)/2}} = \frac{1}{2^{(n+1)/2}} + \frac{t + O(1)}{\binom{n}{(n+1)/2}},\\
p^2 &= p_{(n+1)/2} = \frac{A_{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n-1)/2}} - \frac{A_{(n+1)/2}}{\binom{n}{(n+1)/2}}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{n+3}{2^{(n+7)/2}} - \frac{u}{\binom{n}{(n-1)/2}} - \frac{1}{2^{(n+1)/2}} - \frac{t + O(n)}{\binom{n}{(n+1)/2}}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-5}{2^{(n+7)/2}} - \frac{u}{\binom{n}{(n-1)/2}} - \frac{t + O(n)}{\binom{n}{(n+1)/2}},
\end{aligned}
$$

$$p^3 = p_{(n+3)/2} = \frac{A_{(n-3)/2}}{\binom{n}{(n-3)/2}} - \frac{A_{(n-1)/2}}{\binom{n}{(n-1)/2}}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{n+7}{2^{(n+7)/2}} + \frac{u}{\binom{n}{(n-1)/2}} - \frac{k+O(n)}{\binom{n}{(n-3)/2}},$$
$$p^4 = p_{(n+5)/2} = \frac{A_{(n-5)/2}}{\binom{n}{(n-5)/2}} - \frac{A_{(n-3)/2}}{\binom{n}{(n-3)/2}} = \frac{1}{2^{(n+3)/2}} + \frac{k+O(1)}{\binom{n}{(n-3)/2}}.$$

Ясно, что во всех случаях $|O(1)| < 2$ и $|O(n)| < 2n$, а $p^1, p^2, p^3, p^4$ имеют вид, указанный в условии доказываемой теоремы. Так как $k$, $t$ и $u$ удовлетворяют условию теоремы 2, то можно воспользоваться асимптотикой для $\left|M^1_{0,1}(n, r, z, v)\right|$ из этой теоремы. Поделив эту асимптотику на число всех стековых фильтров с окном размера $n$, получаем утверждение теоремы 5.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Варданян В. А.** О сложности единичных динамических тестов для монотонных булевых функций // Кибернетика. 1987. № 3. С. 23–26.
2. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1981. Вып. 38. С. 5–108.
3. **Нурмеев Н. Н.** О сложности схемной реализации почти всех монотонных булевых функций // Изв. вузов. Математика. 1981. № 5. С. 64–70.
4. **Astola J., Kuosmanen P.** Fundamentals of Nonlinear Digital Filtering. New York: CRC Press, 1997.
5. **Bublitz S., Schürfeld U., Voigt B., Wegener I.** Properties of complexity measures for PRAMs and WRAMs // Theoretical Comput. Sci. 1986. V. 48, N 1. P. 53–73.
6. **Feller W.** An Introduction to Probability Theory and its Applications. V. 1. New York: Wiley, 1968.
7. **Fitch J. P., Coyle E. J., Gallagher N.** Median filtering by threshold decomposition // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1984. V. 32, N 6. P. 1183–1188.
8. **Gabbouj M., Coyle E., Gallagher N.** An overview of median and stack filtering // Circuits, Systems, and Signal Processing. 1992. V. 11, N 1. P. 7–45.
9. **Kuosmanen P., Astola J., Agaian S.** On rank selection probabilities // IEEE Trans. on Signal Processing. 1994. V. 42, N 11. P. 3255–3258.
10. **Pitas I., Venetsanopoulos A. N.** Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990.
11. **Prasad M., Lee Y.** Stack filters and selection probabilities // IEEE Trans. on Signal Processing. 1994. V. 42, N 10. P. 2628–2643.

**12. Shmulevich I., Melnik V., Egiazarian K.** The use of sample selection probabilities for stack filter design // IEEE Signal Processing Letters. 2000. V. 7, N 7.

**13. Tukey J. W.** Exploratory Data Analysis. Reading, MA: Addison-Wesley, 1977.

**14. Wendt P., Coyle E., Gallagher N.** Stack filters // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1986. V. 34, N 4. P. 898–911.

**15. Yin L., Yang R., Gabbouj M., Neuvo Y.** Weighted median filters: a tutorial // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1996. V. 43, N 3. P. 157–192.

Адреса авторов:

*А. Д. Коршунов*
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: korshun@math.nsc.ru

*I. Shmulevich*
Tampere International Center
for Signal Processing,
Tampere Univ. of Technology,
P. O. Box 553,
33101 Tampere, Finland.
E-mail: ilya@cs.tut.fi

Статья поступила
17 мая 2000 г.

Имя файла: korshun.smz
Дата: **10 августа 2000**
Время: **14:06**
Наборщик: **С. С./С. С.**

УДК 519.71+519.218.82

ЧИСЛО СПЕЦИАЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТЕКОВЫХ ФИЛЬТРОВ.

*Коршунов А. Д., Шмулевич И.*

Изучаются три множества специальных монотонных булевых функций от $n$ переменных: одно множество при четном $n$ и два множества пр нечетном $n$. Эти множества характеризуются тем, что нижние единицы любой функции из одного множества располагаются на трех фиксированных соседних слоях $n$-мерного единичного куба и удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Находятся асимптотики для числа таких функций $f$ из каждого множества, что при фиксированных трех слоях функция $f$ имеет заданное число нижних единиц в нижнем слое, заданное число верхних нулей в верхнем слое и равна 1 на заданном числе наборов среднего слоя. Показано, что при любом $n \to \infty$ число всех монотонных булевых функций от $n$ переменных асимптотически совпадает с числом специальных функций от $n$ переменных. Полученные асимптотики используются для характеризации статистических свойств стековых фильтров. Библиогр. 15.